

L'esperienza massa-molla

Valerio Toso e Ettore Zaffaroni (gruppo 5)

1 Introduzione

1.1 Introduzione ai fenomeni in esame

La legge di Hook è una legge che lega la forza applicata a una molla con il suo allungamento: si tratta di una relazione lineare in cui forza applicata e allungamento sono direttamente proporzionali e hanno versi opposti:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$$

Inoltre, se a una molla vincolata a un polo fisso viene appesa una massa m e viene fatta oscillare verticalmente, in assenza di attriti, essa si muoverà di moto armonico, secondo l'equazione:

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \omega^2x = 0$$

Si può dimostrare che:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

in cui la costante k che appare in questa relazione ha lo stesso valore di quella che appare nella legge di Hook (se si sta considerando la stessa molla, ovviamente).

Se invece si considera il caso più complesso in cui agisce l'attrito viscoso dell'aria e è presente una forzante, cioè la molla non è vincolata a un polo fisso ma oscillante, l'equazione del suo moto diventa:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

in cui il termine $C\frac{dx}{dt}$ è l'espressione della forza di attrito viscoso dovuto all'aria e $f(t)$ è l'equazione del moto della forzante.

In particolare, le ampiezze dell'oscillazione in funzione della frequenza della forzante, seguono una lorentziana piccata in ν_0 , cioè l'ampiezza è massima quando la frequenza della forzante è uguale alla frequenza naturale della molla.

1.2 Introduzione all'esperimento

Nella prima parte dell'esperimento ci proponiamo di:

1. verificare la validità della legge di Hook

$$F = k_s \Delta x$$

per un sistema massa-molla e calcolare la costante k_s di elasticità della molla;

2. verificare la validità della legge

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_d}} \quad \longrightarrow \quad k_d T^2 = 4\pi^2 m$$

che lega il periodo di oscillazione del sistema massa-molla con la massa e la costante di elasticità della molla e calcolare la costante k_d ;

3. verificare la compatibilità tra i valori di k_s e di k_d e in caso di esito positivo, calcolarne il valore con la media pesata; in caso di esito negativo con la media aritmetica;
4. misurare il tempo di smorzamento τ , cioè il tempo il cui l'oscillazione della molla si riduce a $1/e$ che per semplicità approssimeremo a $1/3$.

Le grandezze che dovremo misurare saranno le masse con la bilancia elettronica (sensibilità 0,1 g), l'allungamento della molla con un'asta graduata (sensibilità 1 mm) e il periodo di oscillazione con il cronometro (sensibilità 0,1 s dovuta al nostro tempo di reazione).

Nella seconda parte dell'esperimento invece ci proponiamo di verificare che l'andamento dell'ampiezza di un oscillatore forzato in funzione della frequenza della forzante segua una lorentziana; inoltre verificheremo se l'ampiezza a metà altezza della curva sarà compatibile con quella calcolata dal tempo di smorzamento.

Le grandezze misurate sono inizialmente la frequenza di oscillazione e il tempo di smorzamento del sistema massa molla senza forzante e in seguito la frequenza della forzante tramite un oscilloscopio e l'ampiezza dell'oscillazione tramite un sonar.

2 Prima parte

2.1 Descrizione dell'apparato

L'apparato sperimentale è costituito da un supporto vincolato al banco, che funge da polo fisso per la molla, dal sistema massa molla vincolato a tale polo e da un'asta graduata fissata in modo da avere lo zero in corrispondenza della posizione a riposo della molla (figura 1).

I principali problemi legati a questa configurazione sono il fatto che il moto oscillatorio non era perfettamente verticale e a volte il portamasse urtava l'asta graduata, costringendoci a ripetere la misura, e la difficoltà di individuare l'istante in cui l'oscillazione si era ridotta a $1/3$ nella misurazione del tempo di smorzamento.

2.2 Test dell'apparato (caso statico)

Il test dell'apparato è consistito nel misurare l'allungamento della molla con tre masse di valore diverso (tabella 1), riportando i punti su un piano cartesiano con l'allungamento Δx sulle ascisse e la forza $F = mg$ sulle ordinate (grafico 1) e verificandone l'allineamento e la compatibilità della retta interpolante con l'origine.

Tabella 1

F (N)	Δx (m)
0,308	0,014
1,089	0,054
1,869	0,094

I punti trovati sono allineati e la retta è compatibile con l'origine, quindi il test dell'apparato ha avuto esito positivo. Dal test abbiamo ricavato $k_{ts} = 19 \text{ N/m}$.

2.3 Esperimento (caso statico)

Abbiamo misurato l'allungamento della molla con 8 valori diversi della massa seguendo questo procedimento:

1. abbiamo pesato ogni massa utilizzata;
2. abbiamo pesato il portamasse, la cui massa era da sommare con quella di ogni massa utilizzata;
3. abbiamo allineato lo zero dell'asta graduata con la posizione a riposo della molla, tenendo leggermente sollevato il portamasse, in modo che la forza peso applicata sulla molla fosse nulla;
4. abbiamo misurato l'allungamento della molla per ogni valore della massa (tabella 3);

2.4 Elaborazione dei dati (caso statico)

Per prima cosa abbiamo calcolato i valori di $F = mg$, con $g = 9,806 \pm 0,001 \text{ m/s}^2$ e di σ_F (tabella 4).

Dovendo interpolare una retta, abbiamo trasferito l'incertezza sull'allungamento $\sigma_{\Delta x}$ a quella sulla forza σ_F tramite la formula:

$$\sigma'_F = \sqrt{\sigma_F^2 + (k_{ts}\sigma_{\Delta x})^2} = 0,02 \text{ N}$$

In seguito, applicando le formule per il fit lineare (paragrafo 4.1), abbiamo ottenuto la seguente retta interpolante gli otto punti (grafico 3):

$$F = (19,6 \pm 0,3)\Delta x + (0,3 \pm 0,2)$$

Questa retta è compatibile entro 2σ con l'origine e per una miglior valutazione della bontà della misura abbiamo eseguito il test del χ^2 (tabella 4):

$$\chi^2 = 3,1738 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{6} = 0,53 \quad \longrightarrow \quad C.L. = 73\% \div 88\%$$

COMMENTO: Il C.L. compreso tra 73% e 88% mostra come sia effettivamente presente una correlazione lineare tra la forza esercitata sulla molla ed il suo allungamento. La retta calcolata sulla base degli 8 punti ottenuti esprime con buona precisione questa correlazione, inoltre si è verificato entro 2 sigma il passaggio di tale retta per l'origine. Il valore del C.L. inferiore al 90% ci fa supporre inoltre che è stata data una buona valutazione dell'incertezza. Il fatto che l'intercetta sia compatibile con l'origine solo entro 2σ ci fa pensare a un errore sistematico, probabilmente un piccolo errore quando abbiamo tarato lo 0 dell'asta graduata.

2.5 Test dell'apparato (caso dinamico)

Il test dell'apparato è consistito in tre misurazioni di trenta periodi di oscillazione con masse diverse, in modo da ricavare il periodo di una sola oscillazione con buona precisione (tabella 2), verificare l'allineamento dei punti ottenuti e la compatibilità con l'origine (grafico 2).

Tabella 2

m (kg)	$30T$ (s)	T (s)	$4\pi^2m$ (kg)	T^2 (s ²)
0,0514	0,34	10,2	2,07	0,116
0,0713	0,40	12,1	3,01	0,160
0,0913	0,43	12,9	3,47	0,18

Dal grafico si nota che anche in questo caso i punti sono allineati, ma viene a mancare la compatibilità con l'origine, probabilmente a causa di un errore sistematico; abbiamo comunque ricavato $k_{td} = 21 \text{ N/m}$.

2.6 Esperimento (caso dinamico)

Abbiamo misurato tre volte la durata di trenta periodi di oscillazione per ogni valore della massa, in modo da aver una maggiore precisione sul periodo di una sola oscillazione, seguendo questo procedimento:

1. abbiamo messo in oscillazione la molla cercando di tenerla il più verticale possibile in modo che non dondolasse;
2. abbiamo misurato la durata di trenta periodi di oscillazione, tre volte per ogni valore della massa, alternandoci nella misurazione (tabella 5);
3. abbiamo calcolato $4\pi^2m$ e T^2 in modo che la curva interpolante fosse una retta (tabella 6);
4. segnando delle tacche sull'asta graduata abbiamo misurato il tempo di smorzamento per due valori della massa (tabella 7).

2.7 Elaborazione dei dati (caso dinamico)

Dovendo interpolare una serie di punti abbiamo ritenuto opportuno fare in modo che l'equazione della curva interpolante fosse una retta, per questo abbiamo deciso di mettere T^2 sulle ascisse e $4\pi^2m$ sulle ordinate; ne abbiamo quindi calcolato i valori e le relative incertezze (tabella 6).

Come nella precedente elaborazione abbiamo trasferito l'incertezza da T^2 a $4\pi^2m$ tramite la formula:

$$\sigma'_{4\pi^2m} = \sqrt{\sigma_{4\pi^2m}^2 + (k_{td}\sigma_{T^2})^2}$$

In seguito, applicando le formule per il fit lineare (paragrafo 4.2), abbiamo ottenuto la seguente retta interpolante (grafico 4):

$$4\pi^2m = (20,6 \pm 0,5)T^2 - (0,35 \pm 0,03)$$

Riportando la retta su un piano cartesiano, si nota che continua a mancare la compatibilità con l'origine, in quanto la retta ha un'intercetta che corrisponde a un valore della massa di circa 0,009 kg.

Abbiamo comunque eseguito il test del χ^2 per valutare la bontà della misura:

$$\chi^2 = 244,95 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{6} = 40,825 \quad \longrightarrow \quad C.L. = 0\%$$

COMMENTO: con il χ^2 così alto è evidente che abbiamo sottovalutato l'incertezza sul periodo (quella sulla massa è fissa, visto che è data dalla sensibilità della bilancia): noi avevamo assegnato inizialmente $\sigma = 0,1$ s, dati dal nostro tempo di reazione; provando

ad aumentare σ a 0,5 s (un valore ragionevole, dato che potremmo aver anche contato un'oscillazione in più o in meno), il χ^2 viene:

$$\chi^2 = 5,5806 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{6} = 0,93 \quad \longrightarrow \quad C.L. = 42\% \div 57\%$$

In questo caso l'intercetta non è compatibile con l'origine a causa di un errore sistematico: non abbiamo considerato che stavamo lavorando con una molla reale dotata di massa non trascurabile. Si può calcolare che nel caso di un oscillatore con una molla di massa non nulla, alla massa appesa alla molla va aggiunto circa 1/3 della massa della molla.

Essendo le misure di k_s e k_d compatibili, abbiamo calcolato il valore di k tramite la media pesata:

$$k = \frac{k_s \cdot \sigma_{k_d} + k_d \cdot \sigma_{k_s}}{\sigma_{k_s} + \sigma_{k_d}} = 20,225 \dots \text{ N/m}$$

mentre per l'incertezza sulla media pesata abbiamo:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{\sigma_{k_s}^{-2} + \sigma_{k_d}^{-2}}} = 0,3 \text{ N/m}$$

pertanto il valore finale di k sarà:

$$k = 20,2 \pm 0,3 \text{ N/m}$$

Per le misure del tempo di smorzamento invece non abbiamo effettuato una particolare elaborazione, ma ci siamo limitati a calcolare la media aritmetica tra i due valori misurati per ogni valore della massa (tabella 7). Per quanto riguarda l'incertezza sul tempo di smorzamento ci è sembrato ragionevole attribuire $\sigma = 8$ s sulle misure di τ_1 e $\sigma = 20$ s sulle misure di τ_2 poiché in tali intervalli, l'ampiezza dell'oscillazione era così vicina a 1/3 di quella iniziale che era difficile valutare a occhio la sua effettiva riduzione a quel valore. I risultati dei tempi di smorzamento sono dunque:

$$\tau = 47 \pm 4 \text{ s} \quad \text{per} \quad m = 0,0514 \text{ kg}$$

$$\tau = 216 \pm 10 \text{ s} \quad \text{per} \quad m = 0,1906 \text{ kg}$$

COMMENTO: appare evidente che il tempo di smorzamento dipenda dalla massa (maggiore è la massa, maggiore è τ); è interessante notare inoltre che, mentre le incertezze per le misure di periodo erano dell'ordine di 1/10 di secondo, mentre quelle su τ sono dell'ordine del secondo e delle decine di secondi, proprio perché a occhio non si può valutare con precisione l'ampiezza di un'oscillazione.

3 Seconda parte

3.1 Descrizione dell'apparato

L'apparato sperimentale è costituito da un supporto vincolato al banco al quale è fissato un vibratore che viene comandato da un generatore di segnale sinusoidale; questo è a sua volta collegato ad un oscilloscopio digitale per misurare la frequenza del segnale. All'asta del vibratore è vincolata la molla alla quale è attaccato il portamasse; sotto di esso è posizionato il sonar, collegato all'LPRO, a sua volta collegato al PC. Al portamasse abbiamo inoltre fissato un CD in modo da aumentare l'attrito con l'aria (figura 2).

I principali problemi legati a questa configurazione sono tre:

- l'incertezza nella misura della frequenza del segnale del generatore causata dall'oscilloscopio; ci è sembrato ragionevole valutarla $\pm 0,03$ Hz;
- il sistema non oscillava in modo perfettamente verticale, ma erano presenti dei battimenti dovuti ad un secondo moto oscillatorio di frequenza diversa;
- il segnale letto dall'oscilloscopio quando il generatore era collegato all'attuatore era sporco; questo problema è stato risolto staccando il cavo dal vibratore prima di ogni misurazione della frequenza.

3.2 Test dell'apparato

Per prima cosa abbiamo messo in oscillazione la molla senza forzante per misurare la frequenza naturale dell'oscillatore ν_0 e il tempo di smorzamento per mezzo del sonar; ci siamo però accorti che con il tempo di smorzamento ottenuto, la larghezza a metà altezza della lorentziana (pari a $\frac{0,55}{\tau}$) era troppo piccola per riuscire a eseguire almeno 5 misurazioni di frequenza al suo interno; abbiamo quindi cercato di ridurlo usando una molla più leggera, usando un portamasse vuoto e applicandogli un CD per aumentare l'attrito con l'aria e misurato nuovamente il tempo di smorzamento ($\tau = 13$ s). In questo modo la FWHM veniva abbastanza ampia da riuscire a variare la frequenza con una precisione che ci permettesse di ottenere almeno 5 misure al suo interno; in particolare, avevamo:

$$\text{FWHM} = \frac{0,55}{\tau} = \frac{0,55}{13 \text{ s}} = 0,04 \text{ Hz}$$

Abbiamo eseguito anche un test per valutare la sensibilità del sonar, puntandolo verso il muro e verificando qual era la variazione tra le distanze misurate; in questo modo abbiamo attribuito all'ampiezza misurata un'incertezza di 2 mm.

Una volta scelta questa configurazione abbiamo calcolato nuovamente ν_0 partendo dalla misura del periodo di oscillazione (abbiamo ottenuto $\nu_0 = 2,05 \pm 0,03$ Hz) e abbiamo verificato che fosse compatibile con il valore della frequenza della forzante per cui si aveva

la massima ampiezza di oscillazione (abbiamo ottenuto $\nu_0 = 2,00 \pm 0,03$ Hz); essendo i due valori compatibili abbiamo utilizzato quest'ultimo per tracciare la lorentziana una volta trovato il valore della frequenza abbiamo regolato l'ampiezza del segnale in modo che il sistema non oscillasse né troppo (in modo che la molla non si staccasse dal polo) né troppo poco (in modo che le oscillazioni fossero ben visibili) e l'abbiamo lasciata fissa fino alla fine dell'esperimento.

3.3 Esperimento

Abbiamo misurato quindici valori dell'ampiezza del moto relativi ad altrettanti valori della frequenza della forzante seguendo questo procedimento:

1. ci siamo portati alla frequenza della forzante che ci interessava per mezzo della manopola del generatore di segnali, controllandola sull'oscilloscopio, mantenendo il generatore staccato dal vibratore;
2. abbiamo collegato il generatore al vibratore e abbiamo aspettato che l'oscillazione raggiungesse l'ampiezza di regime;
3. abbiamo attivato il sonar per circa un minuto in modo da avere una buona valutazione dell'ampiezza di oscillazione;
4. attraverso il grafico ottenuto dal sonar abbiamo valutato, utilizzando il programma Paint, l'ampiezza dell'oscillazione (nel caso fossero presenti battimenti non troppo marcati, abbiamo tenuto conto del punto medio tra il massimo e il minimo delle ampiezze);
5. abbiamo riportato man mano i punti su un grafico per verificare che i risultati si distribuissero lungo una lorentziana.

3.4 Elaborazione dei dati

Una volta raccolte le quindici misure abbiamo tracciato a mano un possibile grafico della lorentziana (grafico 5), in modo da valutare la compatibilità del FWHM ottenuta dal grafico ($0,09 \pm 0,02$ Hz) con quella calcolata precedentemente; si nota che il valore ottenuto dal grafico è circa doppio di quello calcolato. La σ sul FWHM ci è sembrato ragionevole valutarla leggermente minore di quella sulla frequenza misurata con l'oscilloscopio, poiché non avevamo un'incertezza così alta nel tracciare la curva per più punti.

Questa discrepanza su FWHM è dovuta al fatto che il τ calcolato non era quello del sistema osservato, perché su quest'ultimo agiscono altre forze d'attrito (quelle interne al vibratore, ad esempio), che vanno quindi a modificare il valore del tempo di smorzamento; c'è da considerare inoltre che il primo valore di FWHM era calcolato in un sistema diverso, quello in cui non agiva la forzante.

4 Tabelle e calcoli

4.1 Prima parte (caso statico)

Tabella 3

	m (kg)	σ_m (kg)	Δx (m)	$\sigma_{\Delta x}$ (m)
1	0,0514	0,0001	0,024	0,001
2	0,0713	0,0001	0,035	0,001
3	0,0913	0,0001	0,044	0,001
4	0,1110	0,0001	0,053	0,001
5	0,1309	0,0001	0,063	0,001
6	0,1507	0,0001	0,074	0,001
7	0,1707	0,0001	0,084	0,001
8	0,1906	0,0001	0,094	0,001

$$\sigma_F = F \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2} = 0,02 \text{ N}$$

Tabella 4

	F (N)	σ_F (N)	F_{teo} (N)	χ^2
1	0,504	0,001	0,503	0,0022
2	0,699	0,001	0,719	0,9633
3	0,895	0,001	0,895	0
4	1,089	0,001	1,071	0,7771
5	1,284	0,001	1,267	0,6942
6	1,478	0,001	1,483	0,06
7	1,674	0,001	1,679	0,0592
8	1,869	0,001	1,875	0,085

$$S_x = \sum_{i=1}^8 \frac{\Delta x_i}{\sigma_F^2} = 1177,5$$

$$S_y = \sum_{i=1}^8 \frac{F_i}{\sigma_F^2} = 23730$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^8 \frac{\Delta x_i F_i}{\sigma_F^2} = 1600,56$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^8 \frac{\Delta x_i^2}{\sigma_F^2} = 79,7075$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\sigma_F^2} = 20000$$

$$\Delta = S_{xx}S_1 - S_x S_x$$

$$k_s = \frac{S_{xy}S_1 - S_x S_y}{\Delta} = 19,596 \dots$$

$$b = \frac{S_{xx}S_y - S_{xy}S_x}{\Delta} = 0,032 \dots$$

$$\sigma_{k_s} = \frac{S_1}{\Delta} = 0,31 \dots$$

$$\sigma_b = \frac{S_{xx}}{\Delta} = 0,019 \dots$$

$$k_s = 19,6 \pm 0,3 \text{ N/m} \quad b = 0,03 \pm 0,02 \text{ kg}$$

$$\chi^2 = 3,1738 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{6} = 0,53 \quad \longrightarrow \quad C.L. = 73\% \div 88\%$$

4.2 Prima parte (caso dinamico)

$$\sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_{T_k}}{30\sqrt{3}} = 0,001924 \dots = 0,002 \text{ s}$$

$$\sigma_{4\pi^2 m} = 4\pi^2 \sigma_m = 0,003947 \dots = 0,004 \text{ kg}$$

$$\sigma_{T_k^2} = \sqrt{2} \frac{\sigma_{\bar{T}}}{T_k} T_k^2$$

Tabella 5

	m (kg)	σ_m (kg)	$30T_1$ (s)	$30T_2$ (s)	$30T_3$ (s)	σ_{T_k} (s)
1	0,0514	0,0001	10,2	10,3	10,2	0,1
2	0,0713	0,0001	12,1	12,1	12,1	0,1
3	0,0913	0,0001	12,9	13,0	12,8	0,1
4	0,1110	0,0001	14,3	14,3	14,4	0,1
5	0,1309	0,0001	15,3	15,5	15,2	0,1
6	0,1507	0,0001	16,9	16,9	16,9	0,1
7	0,1707	0,0001	17,3	17,3	17,3	0,1
8	0,1906	0,0001	18,8	18,8	18,8	0,1

Tabella 6

	\bar{T} (s)	$\sigma_{\bar{T}}$ (s)	T^2 (s ²)	σ_{T^2} (s ²)	$4\pi^2 m$ (kg)	$\sigma_{4\pi^2 m}$ (kg)	$4\pi^2 m_{teo}$ (kg)	χ^2
1	0,341	0,002	0,1162	0,001	2,029	0,004	2,071	0,1893
2	0,403	0,002	0,1624	0,001	2,815	0,004	3,008	74,5923
3	0,430	0,002	0,1849	0,001	3,604	0,004	3,465	58,974
4	0,478	0,002	0,2285	0,001	4,382	0,004	4,350	3,0666
5	0,511	0,002	0,2611	0,002	5,168	0,004	5,012	14,1857
6	0,563	0,002	0,3170	0,002	5,949	0,004	6,146	29,6591
7	0,577	0,002	0,3329	0,002	6,739	0,004	6,469	37,5772
8	0,627	0,002	0,3931	0,002	7,525	0,004	7,691	26,7077

$$S_x = \sum_{i=1}^8 \frac{T_i^2}{\sigma_{4\pi^2 m}^2} = 2545,06$$

$$S_y = \sum_{i=1}^8 \frac{4\pi^2 m_i}{\sigma_{4\pi^2 m}^2} = 47938,1$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^8 \frac{T_i^2 4\pi^2 m_i}{\sigma_{4\pi^2 m}^2} = 11174,4$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^8 \frac{T_i^4}{\sigma_{4\pi^2 m}^2} = 586,949$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{\sigma_{4\pi^2 m}^2} = 12500$$

$$\Delta = S_{xx}S_1 - S_xS_x$$

$$k_d = \frac{S_{xy}S_1 - S_xS_y}{\Delta} = 20,5634\dots$$

$$b = \frac{S_{xx}S_y - S_{xy}S_x}{\Delta} = -0,3517\dots$$

$$\sigma_{k_d} = \frac{S_1}{\Delta} = 0,5205\dots$$

$$\sigma_b = \frac{S_{xx}}{\Delta} = 0,0261\dots$$

$$k_d = 20,6 \pm 0,5 \text{ N/m} \quad b = -0,3 \pm 0,03 \text{ kg}$$

$$\chi^2 = 244,952 \quad \longrightarrow \quad \tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{6} = 40,825 \quad \longrightarrow \quad C.L. = 0\%$$

Tabella 7

m (N)	τ_1 (s)	τ_2 (s)	σ_τ (s)	$\bar{\tau}$ (s)	$\sigma_{\bar{\tau}}$ (s)
0,0514	48	46	8	47	4
0,1906	224	208	20	216	10

4.3 Seconda parte

Tabella 8

	ν (Hz)	σ_ν (Hz)	inf (m)	sup (m)	$\sigma_{i/s}$ (m)	$2A$ (m)	σ_{2A} (m)	A (m)	σ_A (m)
1	2,00	0,03	0,476	0,552	0,002	0,076	0,003	0,038	0,002
2	2,01	0,03	-0,039	0,035	0,002	0,074	0,003	0,037	0,002
3	2,02	0,03	-0,034	0,029	0,002	0,063	0,003	0,032	0,002
4	2,03	0,03	0,483	0,538	0,002	0,055	0,003	0,028	0,002
5	2,04	0,03	0,487	0,534	0,002	0,047	0,003	0,024	0,002
6	2,05	0,03	0,493	0,522	0,002	0,025	0,003	0,013	0,002
7	2,06	0,03	0,494	0,530	0,002	0,036	0,003	0,018	0,002
8	2,08	0,03	0,501	0,525	0,002	0,024	0,003	0,012	0,002
9	2,13	0,03	0,505	0,520	0,002	0,015	0,003	0,008	0,002
10	1,99	0,03	0,483	0,543	0,002	0,060	0,003	0,030	0,002
11	1,98	0,03	0,492	0,534	0,002	0,042	0,003	0,021	0,002
12	1,97	0,03	0,496	0,531	0,002	0,035	0,003	0,018	0,002
13	1,94	0,03	0,503	0,524	0,002	0,021	0,003	0,011	0,002
14	1,90	0,03	0,505	0,520	0,002	0,015	0,003	0,008	0,002
15	1,85	0,03	0,506	0,517	0,002	0,011	0,003	0,006	0,002

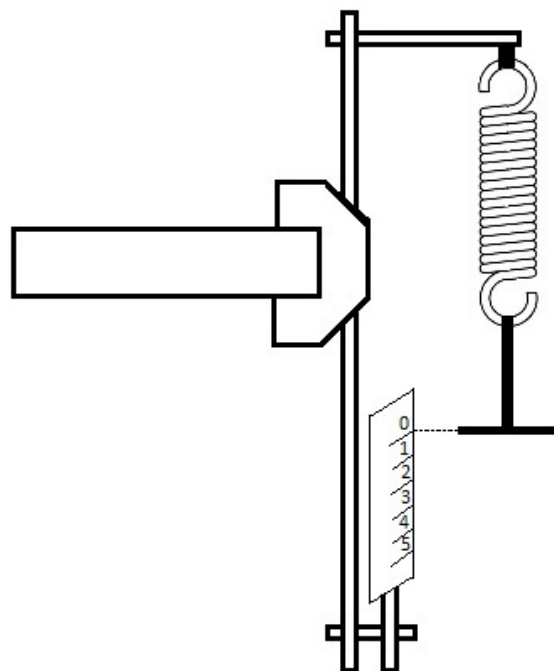


Figura 1: Schema dell'apparato utilizzato nella prima parte dell'esperimento

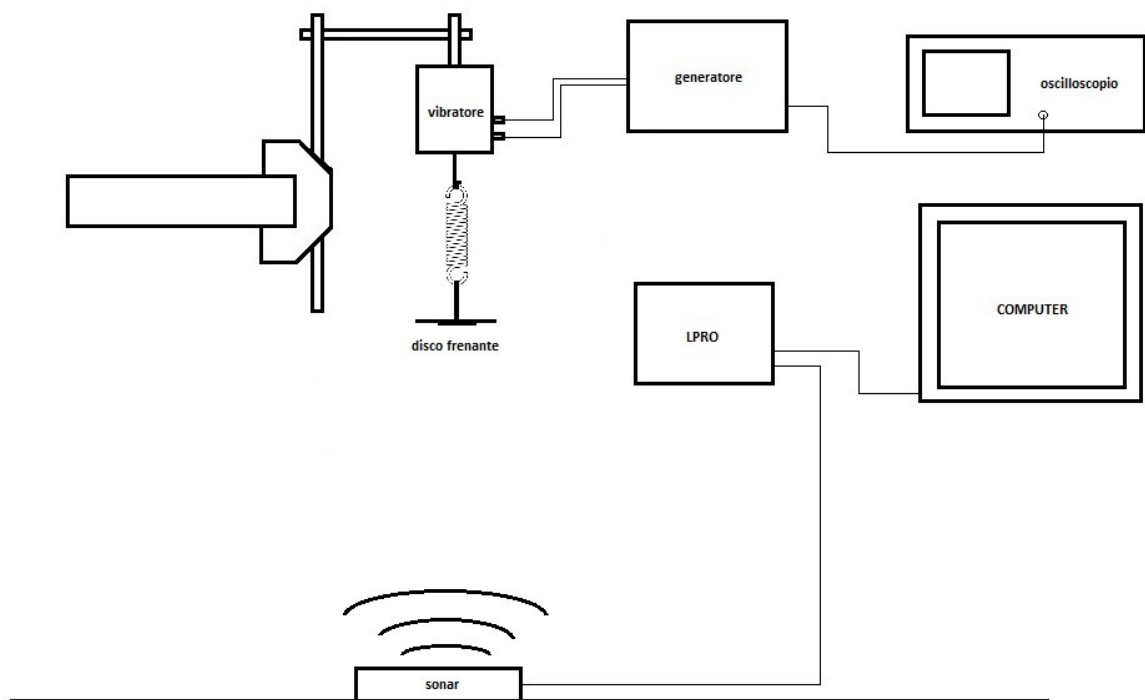


Figura 2: Schema dell'apparato utilizzato nella seconda parte dell'esperimento