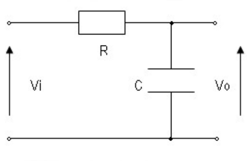
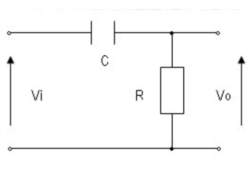
Filtri passa alto, passa basso e passa banda

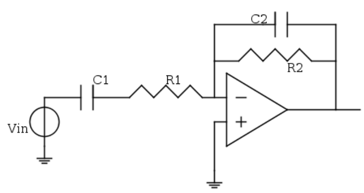
Valerio Toso

1 Introduzione

In elettronica i filtri sono circuiti che processano un segnale modificandone alcune caratteristiche come l'ampiezza e la fase. Essi si possono suddividere in filtri passivi e filtri attivi: i primi sono costituiti da componenti passivi come resistori, capacitori e induttori, i secondi invece vengono realizzati solitamente combinando componenti passivi e attivi come gli amplificatori operazionali. Nel nostro caso abbiamo realizzato il filtro passa basso e passa alto rispettivamente con un circuito RC e un circuito CR, mentre il filtro passa banda è stato realizzato con un amplificatore operazionale in configurazione invertente dove un condensatore è stato messo in serie alla resistenza in ingresso, mentre l'altro in parallelo alla resistenza posta sul ramo di retroazione.







1.1 Impedenza di un condensatore

Se un condensatore viene attraversato da una corrente continua esso si comporta come un interruttore aperto, se invece la corrente è alternata la variazione di carica sulle armature induce un campo elettrico variabile nel tempo il quale genera a sua volta una corrente di spostamento, definita come:

$$I_D = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial E(t)}{\partial t} dS$$

Combinando l'equazione di un condensatore $Q(t) = CV(t)$ e la definizione di corrente: $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ otteniamo:

$$i(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$$

Si può a questo punto applicare la trasformata di Fourier, definita come:

$$Fg(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-jwt}dt$$

alla corrente che è una funzione del tempo e ricavare la sua espressione in funzione della frequenza:

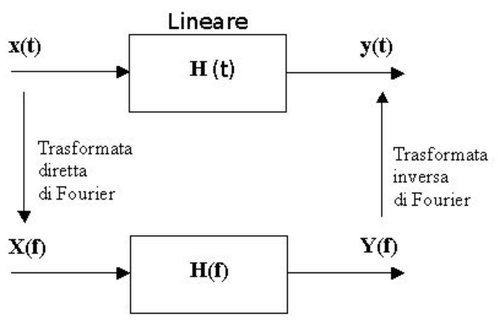
$$I(w) = jwCV(w) \text{ , } j \text{ unità immaginaria.}$$

A questo punto basta dividere la tensione V(w) per la corrente I(w) per ottenere l'impedenza del condensatore:

$$Z = \frac{V(w)}{I(w)} = \frac{1}{jwC}$$

1.2 Teorema della risposta in frequenza

Dato un circuito lineare e un segnale in ingresso sinusoidale del tipo $V_i(t) = V_1 sen(wt)$, il segnale in uscita sarà sempre un segnale sinusoidale di uguale frequenza ma diversa ampiezza e fase: $V_o(t) = V_2 sen(wt + \phi)$.



Si definisce risposta in frequenza H(jw) la trasformata di Fourier della risposta all'impulso H(t) del circuito, ovvero l'uscita di un sistema per un ingresso pari alla Delta di Dirac. Il modulo della risposta in frequenza |H(jw)| rappresenta il guadagno in ampiezza sul segnale a una data frequenza, mentre l'argomento rappresenta lo sfasamento tra segnale in ingresso e uscita.

2 Il circuito CR come filtro passa alto

Consideriamo un circuito CR come quello in Figura 1:

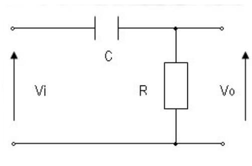


Figura 1: Circuito CR

Se il segnale di ingresso $V_i(t)$ è variabile nel tempo il condensatore C si comporta come una impedenza, dunque il valore di $V_o(t)$ può essere ricavato con la legge del partitore resistivo di tensione:

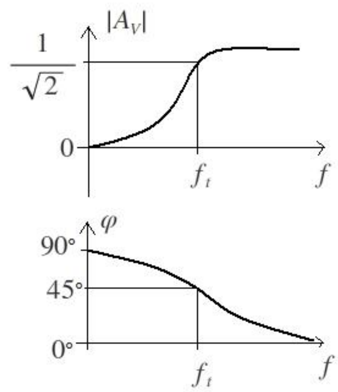
$$V_o(w) = V_i(w)\frac{R}{R+Z}$$

Avendo precedentemente ricavato che $Z = \frac{1}{jwC}$ e con semplici conti ricaviamo che:

$$\frac{V_o(w)}{V_i(w)} = \frac{jwRC}{1+jwRC} = H(jw)$$

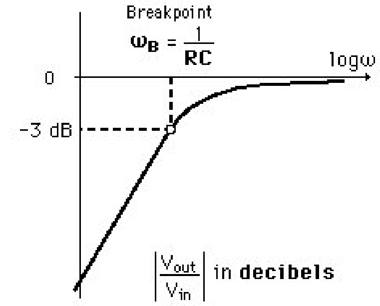
il cui modulo rappresenta il rapporto tra la tensione in ingresso e quella in uscita mentre il cui argomento ne rappresenta lo sfasamento:

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = \frac{|jwRC|}{|1+jwRC|} = \frac{wRC}{\sqrt{1+w^2R^2C^2}}$$



Viene definita "frequenza di taglio" la frequenza corrispondente a $f = \frac{1}{2\pi RC}$ ovvero quella frequenza tale per cui il rapporto tra segnale di ingresso e segnale di uscita vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Tramite l'approssimazione di Bode :

$$1 + jwRC = \begin{cases} 1, & \text{se } w < \frac{1}{RC} \\ jwRC, & \text{se } w > \frac{1}{RC} \end{cases}$$



3 Il circuito RC come filtro passa basso

Consideriamo un circuito RC come quello in Figura 2:

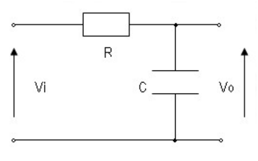


Figura 2: Circuito RC

In questo caso utilizzando la legge del partitore resistivo di tensione si ottiene:

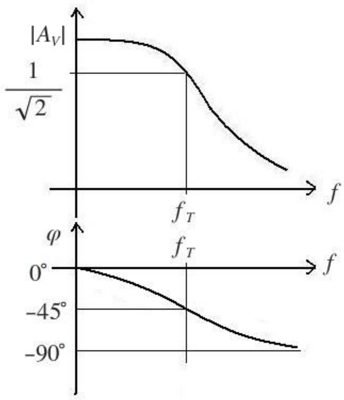
$$V_o(w) = V_i(w)\frac{Z}{Z+R} = V_i(w)\frac{\frac{1}{jwC}}{\frac{1}{jwC}+R}$$

e il rapporto tra tensione in ingresso e tensione in uscita vale dunque:

$$\frac{V_o(w)}{V_i(w)} = \frac{1}{1+jwRC} = H(jw)$$

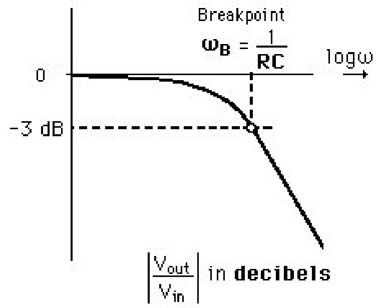
Anche in questo caso il modulo dell'espressione sopra rappresenta il rapporto tra segnale in ingresso e uscita al variare della frequenza, mentre l'argomento rappresenta lo sfasamento...

$$\left|\frac{V_o}{V_i}\right| = \frac{|1|}{|1 + jwRC|} = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2R^2C^2}}$$



La frequenza di taglio corrisponde sempre a $\frac{1}{2\pi RC}$.

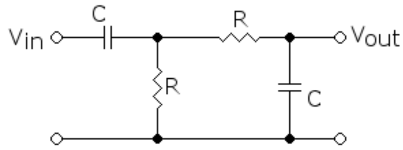
Sempre tramite l'approssimazione di Bode:



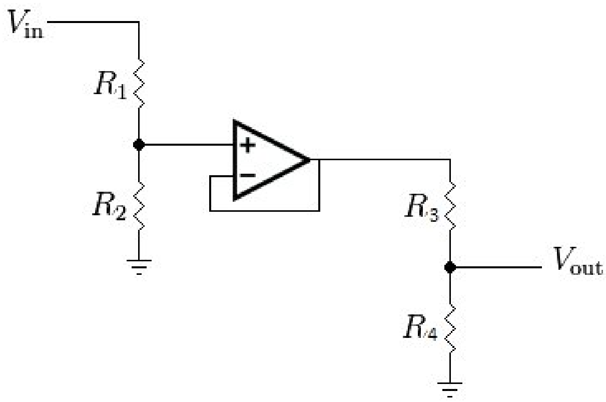
4 Il filtro passa banda

4.1 Filtri passa basso e passa alto in cascata

Per realizzare il filtro passa banda si sarebbe potuto collegare un filtro passa basso e passa alto (o viceversa) in serie:



tuttavia per evitare gli effetti perturbativi sarebbe stato preferibile inserire tra i due un disaccoppiatore di impedenza ("buffer" a guadagno unitario).



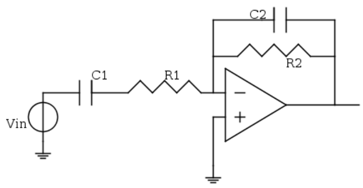
Altrimenti vi sarebbe stato un fattore perturbativo del tipo: $\frac{1}{1+\frac{R_{MONTE}}{R_{VALLE}}}$
e la tensione in uscita dai due partitori in cascata sarebbe stata:

$$V_o = V_i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \frac{1}{1 + \frac{R_1 || R_2}{R_3 + R_4}}$$

E' proprio la resistenza in ingresso $R_1 \to \infty$ e quella in uscita $R_0 \to 0$ del "buffer" a disaccoppiare i due circuiti isolando le correnti in ogni maglia.

4.2 Il Filtro passa Banda

Per realizzare il filtro passa banda abbiamo utilizzato un amplificatore operazionale in configurazione invertente:



In questa configurazione il guadagno ideale dell'amplificatore è $-\frac{Z_2}{Z_1}$ dove Z_1 è l'impedenza del condensatore C_1 in serie alla resistenza R_1 e come dimostrato sopra vale:

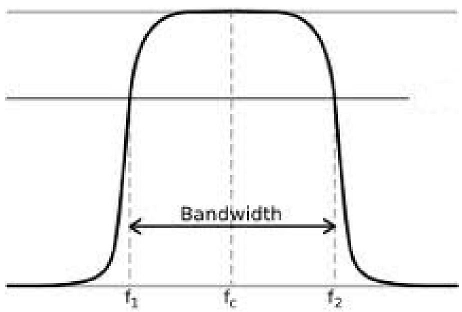
$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{jwC_1}$$

e Z_2 è l'impedenza del condensatore C_2 in parallelo alla resistenza R_2; sempre come dimostrato precedentemente vale:

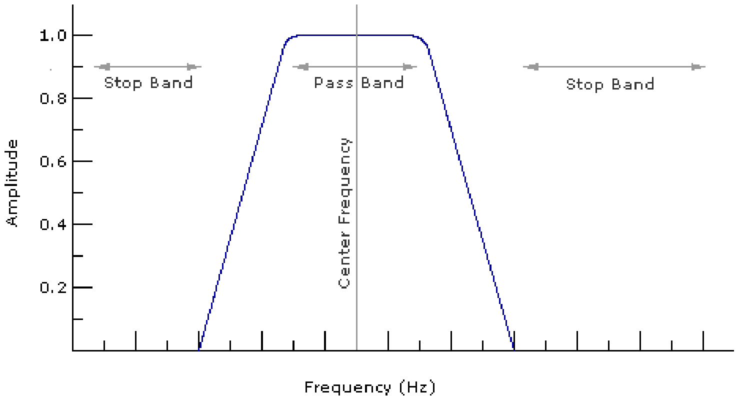
$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + jwR_2C_2}$$

Con queste considerazioni e semplici calcoli si ottiene:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\frac{R_2}{1+jwR_2C_2}}{R_1 + \frac{1}{jwC_1}} = -\frac{jwR_2C_1}{(1 + jwR_1C_1)(1 + jwR_2C_2)}$$



Si può a questo punto suddividere lo spettro delle frequenze su cui opera il filtro in 3 zone:



Band pass filter with a center frequency

Zona 1: $0 < w < \frac{1}{R_1C_1}$

Questa è la zona che dovrebbe venire tagliata dal filtro passa alto, applicando l'approssimazione di Bode alla formula citata sopra possiamo semplificare l'espressione ottenendo:

$$\frac{V_o}{V_i} = -jwR_2C_1$$

Il cui modulo vale WR_2C_1 e la cui fase vale -90

Zona 2: $\frac{1}{R_1C_1} < w < \frac{1}{R_2C_2}$

Questa è la zona in cui il filtro dovrebbe lasciar passare il segnale, sempre tramite 'approssimazione di Bode:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{jwR_2C_1}{jwR_1C_1} = -\frac{R_2}{R_1}$$

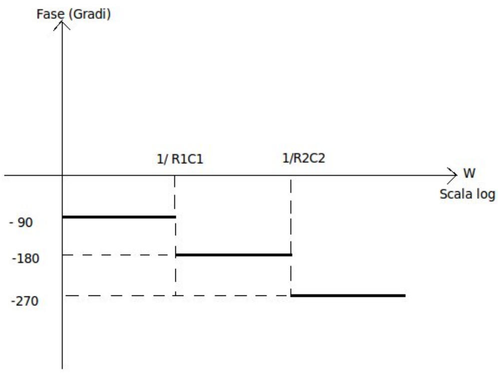
Il cui modulo vale R2/R1 e la cui fase vale -180 rispetto al segnale in ingresso.

Zona 3: $w > \frac{1}{R_2C_2}$

Questa è la zona che dovrebbe venire tagliata dal filtro passa basso, utilizzando nuovamente l'approssimazione di Bode:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{jwR_2C_1}{jwR_1C_1jwR_2C_2} = -\frac{1}{jwR_1C_2}$$

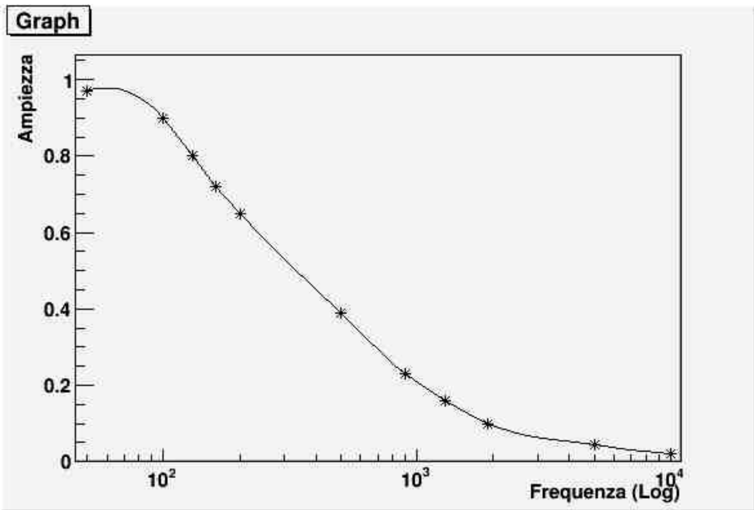
Il cui modulo vale $\frac{1}{wR_1C_2}$ e la cui fase è di -270 rispetto al segnale in ingresso.



5 Esperimento

5.1 Filtro passa basso:

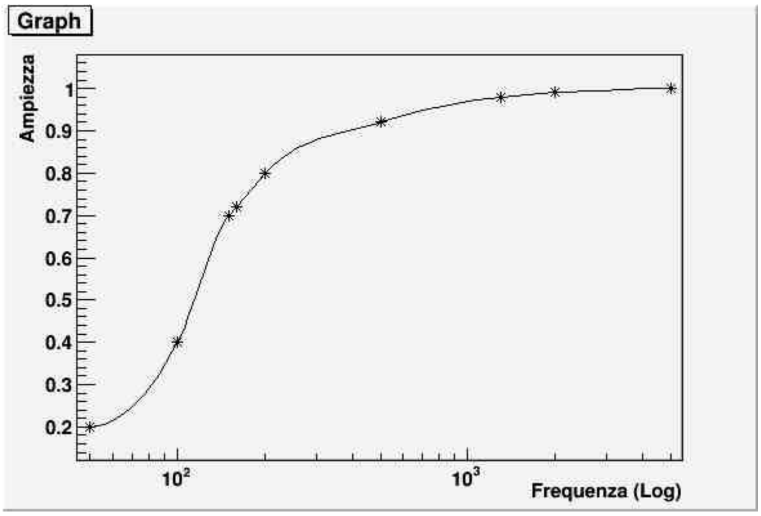
Per il circuito RC con cui abbiamo realizzato il filtro passa basso abbiamo utilizzato una resistenza da $1000\Omega \pm 5\%$ e un condensatore da $1\mu F \pm 5\%$, in questo modo la frequenza di taglio è risultata essere $\approx (160 \pm 10)Hz$.
Abbiamo dunque misurato diversi valori di tensione in uscita dal circuito mantenendo costante la tensione in ingresso e variando la frequenza da un minimo di 50Hz ad un massimo di 10kHz: abbiamo dunque riportato tali valori in un grafico:



Come ci aspettavamo tale grafico segue la curva attesa ed in particolare il valore corrispondente alla frequenza di taglio (160Hz) risulta proprio essere $\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$

5.2 Filtro passa alto:

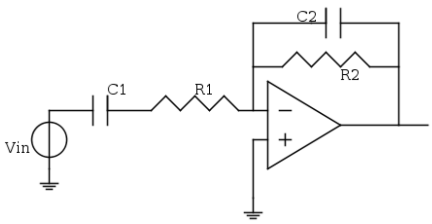
Per il circuito CR con cui abbiamo realizzato il filtro passa alto abbiamo usato gli stessi valori di resistenza $1000\Omega \pm 5\%$ e di capacità $1\mu F \pm 5\%$, in questo modo anche la frequenza di taglio è risultata sempre di $\approx (160\pm10)Hz$
Anche in questo caso abbiamo misurato la tensione in uscita corrispondente a diverse frequenze comprese tra 50Hz e 5kHz:



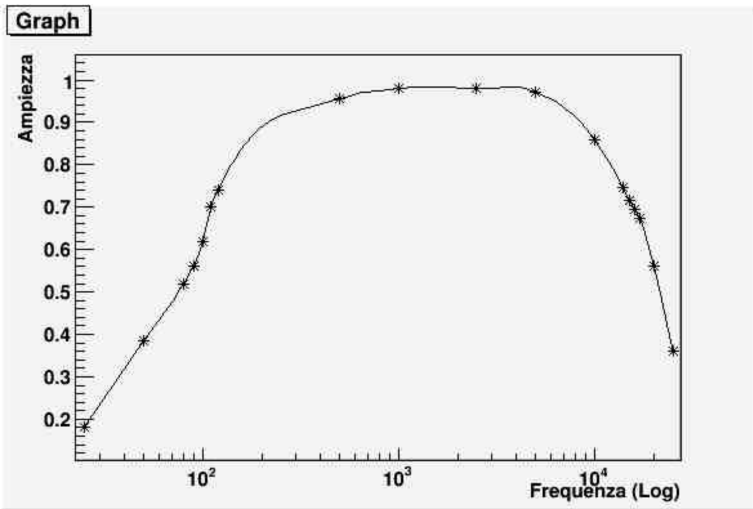
Il grafico segue l'andamento aspettato e il rapporto $\frac{V_o}{V_i}$ alla frequenza di taglio risulta essere come atteso ≈ 0.7

5.3 Filtro passa banda:

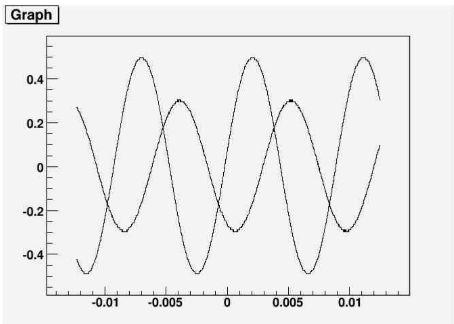
Per realizzare il circuito del filtro passa banda abbiamo utilizzato un amplificatore operazionale del tipo TL081 in configurazione invertente:

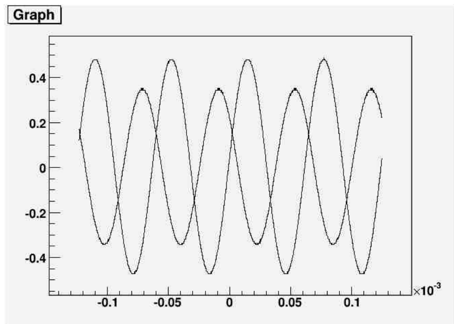


I valori scelti di C_1 e C_2 sono stati scelti rispettivamente di $1.47\mu F \pm 5\%$ e $10nF \pm 5\%$ mentre le resistenze R_1 ed R_2 sono state prese con lo stesso valore ovvero $1k\Omega$ e tolleranza sempre del 5%. In questo modo le frequenze di taglio calcolate con la formula ricavata sopra corrispondono a $\approx (110 \pm 10)$ Hz e $\approx (16 \pm 1)$ kHz Anche in questo caso abbiamo misurato diversi valori di tensione V_o in un range di frequenze comprese tra 25Hz e 25kHz:



Anche in questo caso il grafico segue l'andamento che ci aspettavamo e alle frequenze di taglio corrisponde il corretto rapporto $\frac{V_o}{V_i} \approx 0.7$.





V_i, V_o @ 110Hz

V_i, V_o @16kHz